

Zweidimensionale lokalkompakte zusammenhängende
topologische Laguerreebenen mit Büschelsatz
und

Die analytischen topologischen
Laguerre- und Minkowskiebenen

von

Wolfgang Scholz

aus

Nürnberg

1980 W 189



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Zweidimensionale lokalkompakte zusammenhängende
topologische Laguerreebenen mit Büschelsatz
und
Die analytischen topologischen
Laguerre- und Minkowskiebenen

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Wolfgang Scholz

aus

Nürnberg

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaft-
lichen Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung : 05. Februar 1980

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. H. Wegener

Erstberichterstatter : Professor Dr. K. Strambach

Zweitberichterstatter : Professor Dr. P. Plaumann

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Teil A Zweidimensionale lokalkompakte zusammen- hängende topologische Laguerreebenen mit Büschelsatz	5
Kapitel 1 Vorbemerkungen	
§ 1 Topologische Laguerreebenen	6
§ 2 Die deskriptive Geometrie nach Coxeter	10
Kapitel 2 Die Konjugien	
§ 1 Definition der Konjugien	13
§ 2 Konjugien und Inzidenzen	19
§ 3 Konjugien und Anordnung	24
Kapitel 3 Die Geometrie der Konjugien	
§ 1 Die Inzidenzstruktur der Konjugien	28
§ 2 Das Pasch-Axiom	31
§ 3 Weitere Axiome der deskriptiven Geometrie	38
§ 4 Der Einbettungssatz	48

Teil B	Die analytischen topologischen Laguerre- und Minkowskiebenen	49
§ 1	Analytische Laguerre- und Minkowskiebenen	50
§ 2	Die Gruppen der Projektivitäten	53
§ 3	Die Einzigkeit analytischer Laguerre- und Minkowskiebenen	59
	Literaturverzeichnis	61

Einleitung

Der Begriff einer Benzebene verallgemeinert in natürlicher Weise die Geometrie der ebenen Schnitte einer quadratischen Fläche im dreidimensionalen projektiven Raum; die Möbiusebenen verallgemeinern die Geometrie der ebenen Schnitte der Einheitssphäre, die Laguerreebenen die Geometrie der ebenen Schnitte eines um seine Spitze verminderten Kegels und die Minkowskiebenen die Geometrie der ebenen Schnitte eines einschaligen Hyperboloids.

Die vorliegende Arbeit behandelt zwei Themenkreise. Die eine Fragestellung hängt mit der Vermutung zusammen, daß der Büschelsatz, welcher (neben dem Satz von Miquel) der einzige bisher bekannte, relevante Schließungssatz ist, das geometrische Äquivalent dafür ist, daß man eine Möbius- bzw. Laguerreebene so in einen dreidimensionalen projektiven Raum einbetten kann, daß die Kreise die ebenen Schnitte eines Ovoids (im Fall der Möbiusebene) oder eines um seine Spitze verminderten Kegels (im Fall einer Laguerreebene) sind. In einer schönen Arbeit hat Hesselbach [10] 1933 diese Vermutung bestätigt für diejenigen Möbiusebenen, deren Punktmenge ein zweidimensionaler lokalkompakter zusammenhängender topologischer Raum ist und in dem die geometrischen Operationen des Verbindens, Schneidens und Berührens stetige Abbildungen sind; der Punktraum ist dann homöomorph

zur 2-Sphäre, und die Kreise sind Jordankurven. Durch die Hesselbachschen Betrachtungen angeregt, konnten wir ein analoges Ergebnis für zweidimensionale lokalkompakte zusammenhängende topologische Laguerreebenen beweisen: Jede Laguerreebene, deren Punktraum zweidimensional, lokalkompakt und zusammenhängend ist (man kann dann zeigen, daß er zu einem zweidimensionalen Zylinder homöomorph ausfällt), muß ovoidal sein.

Die Beweisidee folgt im Prinzip dem Hesselbachschen Verfahren: Anstatt den vollen projektiven Raum zu gewinnen, rekonstruieren wir nur die Punkte innerhalb eines Zylinders. Dies wird dadurch möglich, daß die Kreise einer zweidimensionalen topologischen Laguerreebene Jordankurven sind, und geschieht durch sogenannte Konjugien, die durch zwei auf einem Kreis trennend liegende Punktepaaire charakterisiert sind. Daß der Raum der Konjugien wirklich aus einem konvexen Stück des dreidimensionalen projektiven Raumes besteht, wird dadurch bewiesen, daß er die Coxeterschen Axiome für eine "deskriptive Geometrie" erfüllt. Eine weitere Komplikation, die im Gegensatz zu Hesselbach unsere Betrachtungen erschwert, ist die Tatsache, daß parallele Punkte auftreten.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit zusammenhängenden komplex-analytischen Benzebenen; das sind solche topologischen Benzebenen, in denen sowohl die Punktmenge als auch die Kreismenge komplex-analytische Mannigfaltig-

keiten sind und die geometrischen Operationen des Verbindens, Berührens, Parallelprojizierens und Schneidens analytische Abbildungen sind. Bereits Breitsprecher [2] hat 1967 bemerkt, daß die Analytizität einer projektiven Ebene sich drastisch restriktiv auf deren Inzidenzgüte auswirkt. Jede komplex-analytische projektive Ebene ist isomorph zur klassischen projektiven Ebene über den komplexen Zahlen. Da die von ihm benutzten Hilfsmittel auch für den Fall von Kreisgeometrien vorhanden sind (zum einen der Satz von Cartan, daß jede auf einer Sphäre transitiv operierende topologische Gruppe analytischer Abbildungen lisch ist, zum anderen, daß der lische Charakter der Projektivitäten-Gruppe den Satz von Miquel nach sich zieht, vgl. [14]), konnten wir das Analogon von Breitsprecher für Kreisgeometrien beweisen: Jede komplex-analytische Benzebene mit kompakten Kreisen ist isomorph entweder zu der vierdimensionalen miquelschen Laguerreebene im komplexen dreidimensionalen Raum P^3 oder zur klassischen Minkowskiebene der ebenen Schnitte einer irreduziblen komplexen Quadrik in P^3 .

Herr Professor Dr. K. Strambach hat diese Arbeit angeregt und war stets zu klärenden Gesprächen bereit. Dafür möchte ich ihm an dieser Stelle sehr herzlich danken.

Teil A

Zweidimensionale lokalkompakte zusammenhängende
topologische Laguerreebenen mit Büschelsatz

Kapitel 1 Vorbemerkungen

Am Anfang wollen wir die Begriffe 'Topologische Laguerreebene' und 'Büschelsatz' erläutern. Dabei verwenden wir die Definitionen von H.-J. GROH, der die topologischen Laguerreebenen als erster untersucht hat. Danach stellen wir das Axiomensystem der 'Descriptive Geometry' nach H.S.M. COXETER vor.

§ 1 Topologische Laguerreebenen

1. 1 Definition : Eine Laguerreebene Λ ist eine Inzidenzstruktur bestehend aus einer Punktmenge $\mathbb{P}$, einer Teilmenge $\mathcal{K}$ der Potenzmenge von $\mathbb{P}$, deren Elemente Kreise heißen und einer Äquivalenzrelation auf $\mathbb{P}$, die man Parallelität nennt, so daß folgende Axiome erfüllt sind :

- L 1 : Durch je drei paarweise nicht parallele Punkte geht genau ein Kreis.
- L 2 : Ist K ein Kreis, so existiert zu jedem Punkt q auf K und jedem dazu nicht parallelen Punkt p , der nicht auf K liegt, genau ein Kreis L , der p und q enthält und K berührt, d.h. mit K zusammenfällt oder nur einen Punkt gemeinsam hat.
- L 3 : Auf jedem Kreis liegt genau ein Punkt aus jeder Klasse paralleler Punkte.

L 4 : Es gibt vier Punkte, die nicht auf einem Kreis liegen.

1. 2 Bemerkung : Durch die Axiome L 1 bis L 3 sind die Funktionen des Verbindens, Berührens und Parallelprojizierens definiert [8].

Außerdem kann man noch die Funktion des Schneidens erklären, deren Definitionsbereich aus allen Paaren von Kreisen besteht, die genau einen oder zwei Punkte gemeinsam haben.

1. 3 Definition : Eine topologische Laguerreebene ist eine Laguerreebene, in der die Mengen der Punkte und Kreise Topologien tragen, so daß der Punktraum nicht indiskret ist und die Funktionen des Verbindens, Berührens, Schneidens und Parallelprojizierens stetig sind.

1. 4 Bemerkung : In einer topologischen Laguerreebene ist das Parallelprojizieren von einem Kreis auf einen anderen ein Homöomorphismus. Die Klassen paralleler Punkte sind homöomorph zu beliebig punktierten Kreisen ([7], 2.3. Satz b).

Im folgenden bezeichne $K(a,b,c,d)$ den Kreis durch die Punkte a,b,c und d , falls er existiert.

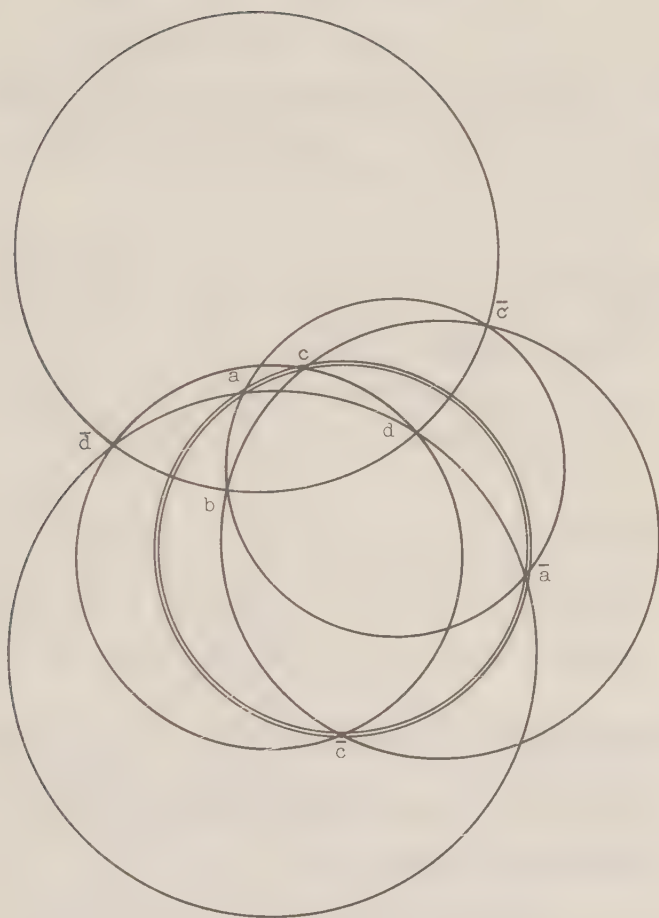
1. 5 Definition : Seien $a, \bar{a}, b, \bar{b}, c, \bar{c}, d$ und $\bar{d}$ paarweise nicht parallele Punkte der Laguerreebene Λ .

Dann gilt in Λ der Büschelsatz, wenn für je acht solcher Punkte aus der Existenz der fünf Kreise $K(a, \bar{a}, b, \bar{b})$, $K(c, \bar{c}, d, \bar{d})$, $K(b, \bar{b}, c, \bar{c})$, $K(a, \bar{a}, d, \bar{d})$ und $K(b, \bar{b}, d, \bar{d})$ die Existenz des Kreises $K(a, \bar{a}, c, \bar{c})$ folgt (Figur 1).

1. 6 Definition : Ist K ein Kreis und sind a und $\bar{a}$ Punkte, die nicht parallel sind und nicht auf K liegen, so sei die Büschelinvolution $\alpha_{a, \bar{a}}$ die folgendermaßen definierte Abbildung des Kreises K auf sich : Für einen Punkt x von K , der nicht parallel zu a und $\bar{a}$ ist, gilt $\{\alpha_{a, \bar{a}}(x), x\} = K(a, \bar{a}, x) \cap K$. Ist x parallel zu a , so ist $\alpha_{a, \bar{a}}(x)$ der eindeutig bestimmte, zu $\bar{a}$ parallele Punkt auf K .

Die Punkte a und $\bar{a}$ heißen Zentren der Büschelinvolution $\alpha_{a, \bar{a}}$.

1. 7 Bemerkung : Die Gültigkeit des Büschelsatzes in einer Laguerreebene ist damit äquivalent, daß zwei Büschelinvolutionen $\alpha_{a, \bar{a}}$ und $\alpha_{b, \bar{b}}$ mit den konzyklischen Zentren $a, \bar{a}$ und $b, \bar{b}$ schon dann identisch auf einem Kreis K wirken, wenn sie einen Punkt von K , der nicht festbleibt und zu den Zentren nicht parallel ist, gleich abbilden [6].



Figur 1

§ 2 Die deskriptive Geometrie nach Coxeter

Sei $\mathbb{D}$ eine Menge von Punkten und darauf sei eine dreistellige Relation, die Zwischenbeziehung $\langle \dots, \dots \rangle$ gegeben. Seien a, b und c Punkte, dann nennt man b zwischen a und c liegend, falls $\langle a, b, c \rangle$ gilt.

2. 1 Definition : Seien a und b zwei verschiedene Punkte.

Dann besteht die Gerade (a, b) aus den Punkten a, b und allen Punkten x , für die $\langle x, a, b \rangle$, $\langle a, x, b \rangle$ oder $\langle a, b, x \rangle$ gilt. Das Intervall $\overline{ab}$ besteht aus a , b und allen Punkten x , für die $\langle a, x, b \rangle$ gilt.

2. 2 Definition : Seien a, b und c drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann besteht die Ebene (a, b, c) aus allen Punkten x , die kollinear liegen mit zwei Punkten aus $\overline{ab}$ oder $\overline{bc}$ oder $\overline{ac}$.

2. 3 Definition : Die Punktmenge $\mathbb{D}$ mit der Zwischenbeziehung und die oben definierten Geraden- und Ebenenmengen bilden eine deskriptive Geometrie Δ , falls folgende Axiome erfüllt sind :

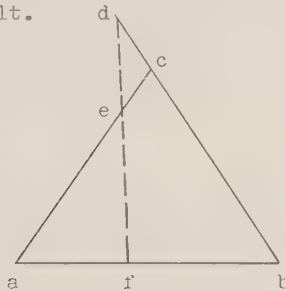
D 1 : Es gibt mindestens zwei verschiedene Punkte.

D 2 : Für zwei Punkte a und b gibt es mindestens einen Punkt c , so daß $\langle a, b, c \rangle$ gilt, d.h. b zwischen a und c liegt.

D 3 : Gilt $\langle a, b, c \rangle$, d.h. liegt b zwischen a und

c, so sind a und c verschieden.

- D 4 : Wenn $\langle a,b,c \rangle$ gilt, dann gilt $\langle c,b,a \rangle$ aber nicht $\langle b,c,a \rangle$.
- D 5 : Sind c und d zwei Punkte auf der Geraden (a,b), dann liegt a auf der Geraden (c,d).
- D 6 : Es gibt mindestens einen Punkt, der nicht auf der Geraden (a,b) liegt.
- D 7 : Wenn a,b und c drei nicht kollineare Punkte sind und d,e Punkte sind, für welche $\langle b,c,d \rangle$ und $\langle c,e,a \rangle$ gilt, dann existiert ein Punkt f auf der Geraden (d,e), für den $\langle a,f,b \rangle$ gilt.



Figur 2

- D 8 : Es gibt mindestens einen Punkt, der nicht in der Ebene (a,b,c) liegt.
- D 9 : Zwei Ebenen, die einen Punkt gemeinsam haben, haben noch einen weiteren gemeinsam.
- D 10 : Für jede Zerlegung der Punkte einer Geraden in zwei nicht leere Mengen, für welche gilt, daß kein Punkt der einen zwischen zwei Punkten der anderen liegt, existiert ein Punkt in

einer der Mengen, der zwischen jedem Punkt dieser und jedem Punkt der anderen Menge liegt.

2. 4 Bemerkung : Diese deskriptive Geometrie Δ kann durch Hinzufügen idealer Elemente in den reellen projektiven Raum eingebettet werden und ist in diesem ein konvexes Gebiet ([11], Kap. 5, S. 50 - 69 oder [5], S. 160).

Kapitel 2 Die Konjugien

Im folgenden betrachten wir eine Fläche, die homöomorph zu $S \times \mathbb{R}$ ist und auf dieser Fläche eine Schar von doppel-punktfreien geschlossenen Kurven, welche Kreise genannt werden. Die Punkte der Fläche und die Kreise sollen die Axiome der topologischen Laguerregeometrie erfüllen und es soll der Büschelsatz gelten.

Auf dieser Fläche werden fixpunktfreie Involutionen, die Konjugien, definiert, die durch die Angabe zweier Punkte-paare, die punktetrennend auf einem Kreis liegen, charakterisiert sind. Die Beziehungen der Konjugien zu den Elementen der Laguerregeometrie werden in den Paragraphen 2 und 3 untersucht.

§ 1 Definition der Konjugien

1. 1 Definition : Vier Punkte $a, \bar{a}, b$ und $\bar{b}$ bestimmen ein Konjugium, wenn sie auf einem Kreis liegen und auf diesem Kreis das Punktepaar $a, \bar{a}$ durch das Punktepaar $b, \bar{b}$ getrennt wird. Dieses Konjugium werde mit $\kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ bezeichnet.

1. 2 Definition : Liegt der Punkt c nicht auf dem Kreis $\kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ und ist c nicht parallel zu den Punkten $a, \bar{a}, b$ und $\bar{b}$, so gehört das Punktepaar $c, \bar{c}$ dann zum

Konjugium $\xi := \kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})$, wenn die Kreise $K(a, \bar{a}, c, \bar{c})$ und $K(b, \bar{b}, c, \bar{c})$ existieren. Sind die Punkte a und c parallel, so gehört das Punktepaar $c, \bar{c}$ dann zum Konjugium ξ , falls der Kreis $K(b, \bar{b}, c, \bar{c})$ existiert, $b, \bar{b}$ von $c, \bar{c}$ getrennt wird und ein Punktepaar $d, \bar{d}$ gefunden werden kann, so daß die Kreise $K(a, \bar{a}, d, \bar{d})$, $K(b, \bar{b}, d, \bar{d})$ und $K(c, \bar{c}, d, \bar{d})$ existieren. Der Punkt $\bar{c}$ heißt dann zu c konjugiert unter $\kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ und wird auch mit c_{ξ} bezeichnet.

1. 3 Bemerkung : Wenn das Punktepaar $c, \bar{c}$ zum Konjugium $\kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ gehört, so wird auf dem Kreis $K(a, \bar{a}, c, \bar{c})$ das Punktepaar $a, \bar{a}$ durch das Punktepaar $c, \bar{c}$ getrennt, falls der Kreis existiert (Beweis siehe [10]).

1. 4 Definition : Die Klasse der zum Punkt a parallelen Punkte wird mit $[a]$ bezeichnet.

1. 5 Bemerkung : Falls in 1.2 Definition der Punkt a parallel zu c ist, so folgt aus 1.1.7 Bemerkung, daß $\bar{c}$ parallel zu $\bar{a}$ ist, wenn man die Involutionen $\alpha_{a, \bar{a}}$ und $\alpha_{d, \bar{d}}$ mit den konzyklischen Zentren $a, \bar{a}$ und $d, \bar{d}$ in ihrer Wirkung auf dem Kreis $K(b, \bar{b}, c, \bar{c})$ betrachtet. Sie bilden auf diesem den Punkt b und damit auch den Punkt c gleich ab. Somit ist $\bar{c}$ der eindeutig bestimmte Punkt aus der Parallelklasse $[\bar{a}]$ auf dem Kreis $K(b, \bar{b}, c)$.

1. 6 Definition : Seien $a, \bar{a}, b, \bar{b}, c$ und $\bar{c}$ sechs Punkte auf einem Kreis K und es existiere das Konjugium $\xi := \kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})$. Genau dann gehört das Punktepaar $c, \bar{c}$ zum Konjugium ξ , wenn es ein Punktepaar $d, \bar{d}$ mit folgenden Eigenschaften gibt :

- i) Der Punkt d ist nicht parallel zu a, b oder c .
- ii) Der Punkt $\bar{d}$ ist nicht parallel zu c .
- iii) Das Punktepaar $d, \bar{d}$ gehört zum Konjugium ξ .
- iv) Die Punkte d und $\bar{d}$ liegen nicht auf dem Kreis K .
- v) Der Punkt $\bar{c}$ ist der Schnittpunkt der beiden Kreise K und $K(c, d, \bar{d})$, welcher verschieden von c ist.

1. 7 Satz : Seien $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ und c fünf Punkte, es existiere das Konjugium $\xi := \kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ und c liege auf dem Kreis $K(a, \bar{a}, b, \bar{b})$. Sei $d, \bar{d}$ ein Punktepaar, das die Bedingungen i) bis iv) aus 1.6 Definition erfüllt. Ein solches Paar existiert wegen 1.2 Definition. Der zu c unter ξ konjugierte Punkt $\bar{c}$ ist der von c verschiedene Schnittpunkt der Kreise $K(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ und $K(c, d, \bar{d})$. Der so konstruierte Punkt $\bar{c}$ ist von der Wahl von d unabhängig.

Beweis : Seien $d, \bar{d}$ und $d', \bar{d}'$ zwei Punktepaare, welche die Bedingungen i) bis iv) erfüllen.

Fall 1 : Sei d nicht zu d' parallel.

Dann existieren die Kreise $K(a, \bar{a}, b, \bar{b})$, $K(a, \bar{a}, d, \bar{d})$, $K(b, \bar{b}, d, \bar{d})$, $K(a, \bar{a}, d', \bar{d}')$ und $K(b, \bar{b}, d', \bar{d}')$. Aus dem

Büschelsatz folgt dann die Existenz des Kreises $K(d, d', d'', \bar{d}'')$. Sei nun $\bar{c}$ mit Hilfe von d konstruiert. Somit existieren die Kreise $K(d, \bar{d}, d', \bar{d}')$, $K(a, \bar{a}, c, \bar{c})$, $K(c, \bar{c}, d, \bar{d})$, $K(a, \bar{a}, d', \bar{d}')$ und $K(a, \bar{a}, d, \bar{d})$. Die nochmalige Anwendung des Büschelsatzes ergibt die Existenz des Kreises $K(c, \bar{c}, d', \bar{d}')$.

Fall 2 : Sei nun d parallel zu d' .

Man wähle ein weiteres Punktepaar $d'', \bar{d}''$ des Konjugiums ξ , welches die Bedingungen i) bis iv) erfüllt. Dabei sei d'' nicht parallel zu d und $\bar{d}$. Mit Hilfe dieses Punktepaares konstruiere man den zu c unter ξ konjugierten Punkt $\bar{c}''$. Nach Fall 1 folgt, daß $\bar{c}$ gleich $\bar{c}''$ und $\bar{c}''$ gleich $\bar{c}'$ ist.

1. 8 Korollar : Sei ξ ein Konjugium. Dann existiert zu jedem Punkt c der unter ξ konjugierte Punkt $\bar{c}$.

1. 9 Bemerkung : Mit den Bezeichnungen von 1.7 Satz gilt : Die Punktepaare $c, \bar{c}$ und $d, \bar{d}$ trennen sich auf dem gemeinsamen Kreis.

1.10 Satz : Ein Konjugium ist durch zwei Punktepaare, die zu ihm gehören, wohlbestimmt.

Beweis : Sei $a, \bar{a}, b, \bar{b}$ ein Punktequadrupel, welches ein Konjugium λ bestimmt, und sei $c, \bar{c}$ ein Punktepaar, das zu diesem Konjugium gehört. Es genügt zu

zeigen, daß λ durch das Quadrupel $a, \bar{a}, c, \bar{c}$ wohlbestimmt ist.

Fall 1 : Der Punkt c ist nicht parallel zu $a, \bar{a}, b$ und $\bar{b}$. Dann gehört das Punktepaar $b, \bar{b}$ zum Konjugium $\mu := \kappa(a, \bar{a}, c, \bar{c})$.

i) Sei d ein Punkt, der nicht parallel zu $a, \bar{a}, b, \bar{b}, c$ und $\bar{c}$ ist. Dann gilt $d_\lambda = \{K(a, \bar{a}, d) \cap K(b, \bar{b}, d)\} \setminus \{d\}$ und $d_\mu = \{K(a, \bar{a}, d) \cap K(c, \bar{c}, d)\} \setminus \{d\}$. Also folgt die Existenz der Kreise $K(a, \bar{a}, d, d_\lambda)$, $K(b, \bar{b}, d, d_\lambda)$, $K(a, \bar{a}, c, \bar{c})$, $K(b, \bar{b}, c, \bar{c})$ und $K(a, \bar{a}, b, \bar{b})$. Aus dem Büschelsatz folgt nun die Existenz des Kreises $K(c, \bar{c}, d, d_\lambda)$ und somit gilt $d_\lambda = d_\mu = \bar{d}$.

ii) Der Punkt d sei nun parallel zu a . Dann ist der Punkt $d_\lambda = K(b, \bar{b}, d) \cap [\bar{a}]$ und es ist $d_\mu = K(c, \bar{c}, d) \cap [\bar{a}]$. Die Büschelinvolutionen $\alpha_{a, \bar{a}}$ und $\alpha_{c, \bar{c}}$ mit konzyklischen Zentren bilden den Punkt b des Kreises $K(b, \bar{b}, d, d_\lambda)$ gleich ab und damit auch den Punkt d . Also existiert der Kreis $K(c, \bar{c}, d, d_\lambda)$ und es folgt $d_\lambda = d_\mu = \bar{d}$.

iii) Ist der Punkt d parallel zu b , so gilt $d_\lambda = K(a, \bar{a}, d) \cap [\bar{b}]$ und $d_\mu = \{K(a, \bar{a}, d) \cap K(c, \bar{c}, d)\} \setminus \{d\}$. Die Büschelinvolutionen $\alpha_{b, \bar{b}}$ und $\alpha_{c, \bar{c}}$ mit konzyklischen Zentren bilden den Punkt a des Kreises $K(a, \bar{a}, d)$ gleich ab und damit auch den Punkt d . Also folgt $d_\lambda = d_\mu = \bar{d}$.

iv) Ist der Punkt d parallel zu c , so folgert man analog ii).

Fall 2 : Der Punkt c sei nun parallel zu a , und damit ist $\bar{c}$ parallel zu $\bar{a}$.

- i) Zuerst sei d ein Punkt, der nicht parallel zu $a, \bar{a}, b$ und $\bar{b}$ ist. Wie oben erhält man
- $$d_\lambda = \{K(a, \bar{a}, d) \cap K(b, \bar{b}, d)\} \setminus \{d\} \quad \text{und}$$
- $$d_\mu = \{K(a, \bar{a}, d) \cap K(c, \bar{c}, d)\} \setminus \{d\}.$$
- Die Büschelinvolutionen $\alpha_{a, \bar{a}}$ und $\alpha_{d, d}$ bilden den Punkt b des Kreises $K(b, \bar{b}, c, \bar{c})$ gleich ab und damit auch den Punkt c . Also folgt $d_\lambda = d_\mu$.
- ii) Nun sei der Punkt d parallel zu a und damit auch zu c . Dann wählt man einen Punkt e , der nicht zu $a, \bar{a}, b$ oder $\bar{b}$ parallel ist. Nach i) gilt $\bar{e} = e_\mu = e_\lambda$. Jetzt definiert man
- $$d_\mu := K(e, \bar{e}, d) \cap [\bar{a}].$$
- Da aus Fall 1 folgt $d_\mu = d_\lambda$, ist d_μ unabhängig von der Wahl von e .
- iii) Ist der Punkt d parallel zu b und damit d parallel zu $\bar{b}$, so wählt man einen Punkt e , der nicht auf dem Kreis $K(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ liegt und nicht parallel zu $a, \bar{a}, b$ oder $\bar{b}$ ist. Das Konjugium $v := \kappa(b, \bar{b}, e, \bar{e})$ ist nach Fall 1 identisch mit λ . v aber ist identisch mit dem Konjugium $\kappa(b, \bar{b}, c, \bar{c})$. Also existiert der Kreis $K(c, \bar{c}, d, d_\lambda)$ und damit folgt $d_\lambda = d_\mu = \bar{d}$.

Fall 3 : Der Punkt c sei nun parallel zu b , und damit ist $\bar{c}$ parallel zu $\bar{b}$.

- i) Ist der Punkt d nicht parallel zu $a, \bar{a}, b$ und $\bar{b}$, so ist $d_\lambda = \{K(a, \bar{a}, d) \cap K(b, \bar{b}, d)\} \setminus \{d\}$. Die Involu-

tionen $\alpha_{b,\bar{b}}$ und $\alpha_{d,\bar{d}}$ mit konzyklischen Zentren bilden den Punkt a des Kreises $K(a,\bar{a},c,\bar{c})$ gleich ab und damit auch den Punkt c . Also existiert der Kreis $K(c,\bar{c},d,\bar{d})$ und es folgt $d_\lambda = d_\mu$.

- ii) Sei nun der Punkt d parallel zu a oder b . Man wählt einen Hilfspunkt e , der nicht zu $a,\bar{a},b,\bar{b}$, d und d_λ parallel ist. Dann ist nach Fall 1 das Konjugium $v := \kappa(a,\bar{a},e,\bar{e})$ mit λ identisch und dieses wiederum mit dem Konjugium $\kappa(a,\bar{a},c,\bar{c})$.

1.11 Bemerkung : Für jedes Konjugium gilt :

$$\kappa(a,\bar{a},b,\bar{b}) = \kappa(\bar{a},a,b,\bar{b}) = \kappa(b,\bar{b},\bar{a},a).$$

Die Reihenfolge der definierenden Punkte ist also nur modulo einer D_8 bestimmt ([1], 2.1.4 Bemerkung).

§ 2 Konjugien und Inzidenzen

2. 1 Definition : Ein Kreis gehört zu einem Konjugium, wenn ein Punktepaar des Konjugiums auf ihm liegt.

2. 2 Bemerkung : Gehört ein Kreis zu einem Konjugium, so liegt der Konjugierte jedes Punktes des Kreises wieder auf dem Kreis.

Beweis : Das Punktequadrupel $a,\bar{a},b,\bar{b}$ bestimme das

Konjugium ξ . Das Punktepaar $c, \bar{c}$ gehöre zu ξ . Sei M ein Kreis durch $c, \bar{c}$ und einen weiteren Punkt d .

Ist c nicht parallel zu $a, \bar{a}, b$ und $\bar{b}$, so folgt die Behauptung sofort aus dem Büschelsatz.

Ist c parallel zu a , und ist d nicht parallel zu b und $\bar{b}$, dann wird nach 1.10 Satz ξ auch durch das Quadrupel $b, \bar{b}, c, \bar{c}$ bestimmt und die Behauptung folgt aus der Konstruktion des Konjugierten.

Ist c parallel zu a und nun auch d parallel zu b , so folgt die Behauptung wieder aus der Konstruktion des Konjugierten.

2.3 Definition : Zwei Konjugien ξ und η heißen parallel, wenn für alle Punkte p die Konjugierten p_ξ und p_η parallel sind. Die Klasse der zu ξ parallelen Konjugien werde mit $[\xi]$ bezeichnet.

2.4 Satz : Zu zwei Konjugien ξ und η , die nicht parallel sind, gibt es genau ein Paar konjugierter Punkte, das zu beiden Konjugien gehört.

Beweis : Seien ξ und η Konjugien, und sei b ein Punkt mit der Eigenschaft, daß b_ξ nicht zu b_η parallel ist. Dann existiert der Kreis $K(b, b_\xi, b_\eta)$. Weiter sei x ein Punkt, der nicht auf diesem Kreis liegt und der zu b_η parallel ist. Dann ist x nicht parallel zu b und b_ξ . Also existiert auch der Kreis

$K(x, b, b_{\xi})$. Der Punkt x_{ξ} ist zu b und b_{ξ} nicht parallel und liegt wegen 2.2 Bemerkung auf dem Kreis $K(x, b, b_{\xi})$, auf dem das Punktepaar x, x_{ξ} das Punktepaar b, b_{ξ} trennt. Also schneiden sich die Kreise $K(x, x_{\xi}, x_{\eta})$ und $K(b, b_{\xi}, b_{\eta})$ in zwei Punkten a und $\bar{a}$. Da die beiden Kreise zu beiden Konjugien gehören, sind die Punkte a und $\bar{a}$ unter ξ und η konjugiert.

2. 5 Satz : Zwei Kreise, die zu einem Konjugium gehören, schneiden sich in zwei Punkten.

Beweis : Seien K und L zwei Kreise, die zu einem Konjugium λ gehören und $k, \bar{k}$ bzw. $l, \bar{l}$ zwei Punktepaare auf K bzw. L mit $\bar{k} = k_{\lambda}$ und $\bar{l} = l_{\lambda}$. O.B.d.A. sind die Punkte $k, \bar{k}, l$ und $\bar{l}$ paarweise nicht parallel. Also existiert der Kreis $K(k, \bar{k}, l, \bar{l})$, auf dem das Punktepaar $k, \bar{k}$ das Punktepaar $l, \bar{l}$ trennt. Nach dem Jordanschen Kurvensatz schneiden sich also die Kreise K und L .

2. 6 Satz : Jeder Kreis gehört zu genau einem Konjugium aus jeder Klasse paralleler Konjugien.

Beweis : Sei $[\mathfrak{J}]$ eine Klasse paralleler Konjugien und K ein Kreis. Seien r und s Punkte von K . Man betrachtet dann $r_{\pi} := [r_{\mathfrak{J}}] \cap K$ und $s_{\pi} := [s_{\mathfrak{J}}] \cap K$. Es liegen $r, r_{\mathfrak{J}}$ und $s, s_{\mathfrak{J}}$ punkt-trennend auf einem Kreis. Aus der Stetigkeit des Parallelprojizierens

dieses Kreises auf K folgt, daß r, r_π und s, s_π punktettrennend auf K liegen. Also definieren diese Punkte ein Konjugium π . Ist π von $\mathfrak{D}$ verschieden, so bleibt zu zeigen, daß π parallel zu $\mathfrak{D}$ ist, d.h. für alle Punkte t muß t_π parallel zu $t_\mathfrak{D}$ sein.

Annahme : Für einen Punkt t sind t_π und $t_\mathfrak{D}$ nicht parallel. Dann existiert der Kreis $L := K(t, t_\pi, t_\mathfrak{D})$. Auf diesen Kreis projiziert man K ; also r geht in r' , s in s' , $r_\mathfrak{D}$ in $r'_\mathfrak{D}$, r_π in r'_π , $s_\mathfrak{D}$ in $s'_\mathfrak{D}$ und s_π in s'_π . Es gilt jedoch $r'_\pi = r'_\mathfrak{D} = r'_\mathfrak{D} = r'_\pi$ und $s'_\pi = s'_\mathfrak{D} = s'_\mathfrak{D} = s'_\pi$, da L zu π und $\mathfrak{D}$ gehört. Daraus folgt die Gleichheit von π und $\mathfrak{D}$.

2. 7 Definition : Zwei Klassen paralleler Punkte gehören zu einem Konjugium ξ , wenn es einen Punkt p aus der einen Klasse gibt, so daß p_ξ in der anderen Klasse liegt.

2. 8 Satz : Zu drei paarweise nicht parallelen Konjugien ξ , η und ζ gibt es entweder einen Kreis, der zu den drei Konjugien gehört oder ein gemeinsames Paar von Klassen paralleler Punkte oder es gibt ein Punktepaar, welches zu den drei Konjugien gehört.

Beweis : Seien $a(\xi, \eta)$ und $\bar{a}(\xi, \eta)$ die beiden Punkte, welche zu ξ und η , weiter $a(\xi, \zeta)$ und $\bar{a}(\xi, \zeta)$ die beiden Punkte, die zu ξ und ζ gehören. Diese Punktepaaire sind also unter ξ konjugiert.

Fall 1 : Diese vier Punkte liegen auf einem Kreis. Dann gehört dieser Kreis auch zu allen drei Konjugien. Gäbe es zwei solcher Kreise, so würden sich diese schneiden, und die drei Konjugien hätten ein Punktepaaire gemeinsam.

Fall 2 : Die Punkte $a(\xi, \zeta)$ und $a(\xi, \eta)$ sind parallel, dann sind auch $\bar{a}(\xi, \zeta)$ und $\bar{a}(\xi, \eta)$ parallel. Nach 2.7 Definition gehören dann die beiden Klassen paralleler Punkte $[a(\xi, \eta)]$ und $[\bar{a}(\xi, \eta)]$ zu allen drei Konjugien.

Fall 3 : Die Punkte $a(\xi, \eta)$ und $a(\xi, \zeta)$ fallen zusammen. Dann gehört das Punktepaaire $a(\xi, \eta), \bar{a}(\xi, \eta)$ zu allen drei Konjugien.

2.9 Satz : Seien ξ und η zwei parallele Konjugien.

Dann gibt es kein Punktepaaire, welches zu beiden Konjugien gehört.

Beweis : Nimmt man an, es existiert doch ein Punktepaaire $a, \bar{a}$, das zu ξ und η gehört. Sei K ein Kreis, welcher a und $\bar{a}$ enthält. Sei b ein Punkt aus K . Dann liegen b_ξ und b_η ebenfalls auf K . Dies steht im Widerspruch zur Parallelität von b_ξ und b_η .

2.10 Bemerkung : Seien ξ und η zwei parallele Konjugien und ζ ein weiteres dazu nicht paralleles Konjugium. Dann existieren zwei Klassen paralleler Punkte, die zu allen drei Konjugien gehören.

Beweis : Es existiert das Punktepaar $a, \bar{a}$ mit $\bar{a} = a_\xi = a_\zeta$. Die Klassen paralleler Punkte $[a]$ und $[\bar{a}]$ leisten das Verlangte.

§ 3 Konjugien und Anordnung

3.1 Definition : Seien ξ , η und ζ drei Konjugien, die das Punktepaar $a, \bar{a}$ gemeinsam haben. Sei b ein Punkt, der nicht zu a und $\bar{a}$ parallel ist. Sei K der Kreis $K(a, \bar{a}, b)$.

Dann liegt ζ zwischen ξ und η , wenn auf K das Punktepaar b, b_ζ durch das Punktepaar b_ξ, b_η getrennt wird.

3.2 Bemerkung : Mit den Bezeichnungen obiger Definition gilt für jeden weiteren Punkt c , welcher nicht zu a und $\bar{a}$ parallel ist, daß auf $K(a, \bar{a}, c)$ das Punktepaar c, c_ζ durch das Punktepaar c_ξ, c_η getrennt wird; d.h. die Anordnung der Konjugien ist wohldefiniert.

Beweis : Ist der Punkt c nicht zu b, b_ξ, b_η und b_ζ parallel, so folgt die Behauptung nach [10].

Ist jedoch der Punkt c parallel zu b , so wählt man auf dem Kreis K einen Punkt b' , der verschieden von $a, \bar{a}$ und b ist. Nach [10] wird dann das Punktepaar b', b'_ζ durch das Punktepaar b'_ξ, b'_η getrennt. Falls c nicht zu b'_ξ, b'_η und b'_ζ parallel ist, folgt die Bemerkung wie oben. Andernfalls variiert man b' .

3. 3 Bemerkung : Nach ([7], 2.3. Satz b) sind die Klassen paralleler Punkte homöomorph zu beliebig punktierten Kreisen. Die Punktetrennung auf Kreisen induziert somit eine Zwischenbeziehung auf den punktierten Kreisen und diese eine Anordnung auf den Klassen paralleler Punkte.

3. 4 Definition : Sei $\mathfrak{D}$ ein Konjugium, und sei a ein beliebig fester Punkt. Seien ξ, η und ζ drei Konjugien aus $[\mathfrak{D}]$. Dann gehören die Punkte a_ξ, a_η und a_ζ zu einer Klasse paralleler Punkte. Es liege ζ zwischen ξ und η genau dann, wenn der Punkt a_ζ zwischen a_ξ und a_η liegt.

3. 5 Bemerkung : Mit den Bezeichnungen dieser Definition gilt : Die Zwischenbeziehung von ξ, η und ζ ist unabhängig vom Punkt a .

Beweis : Sei $[b]$ eine Klasse paralleler Punkte. b trägt die Spurtopologie. Dann wird auf $[\mathfrak{D}]$ eine To-

pologie folgendermaßen induziert :

Sei x ein Punkt mit der Eigenschaft, daß $x_{\mathfrak{J}}$ zu $[b]$ gehört. Eine Teilmenge T von $[\mathfrak{J}]$ heiße offen, wenn $x_T := \{x_{\tau} | \tau \in T\}$ offen in $[b]$ ist. Die Auswertung im Punkt x ist eineindeutig. Deshalb erhält man einen Homöomorphismus von $[\mathfrak{J}]$ auf $[b]$. Somit induziert jeder Punkt x die gleiche Topologie auf $[\mathfrak{J}]$.

3. 6 Definition : i) Seien ξ und η zwei nicht par-

allele Konjugien und a, b zwei Punkte auf einem Kreis K , der zu ξ und zu η gehört.

Dann trennt das Punktepaar a, b die Konjugien ξ und η , wenn auf K das Punktepaar a, b das Punktepaar a_{ξ}, a_{η} trennt.

In diesem Fall trennt auch das Punktepaar a, b das Punktepaar b_{ξ}, b_{η} (siehe [10]).

ii) Seien nun ξ und η zwei parallele Konjugien und a, b zwei Punkte mit der Eigenschaft, daß b zu $[a_{\xi}] = [a_{\eta}]$ gehört und verschieden von a_{ξ} und a_{η} ist.

Dann trennt das Punktepaar a, b die Konjugien ξ und η , wenn a zwischen b_{ξ} und b_{η} , sowie b zwischen a_{ξ} und a_{η} liegt.

iii) Seien weiter ξ und η zwei nicht parallele Konjugien mit dem gemeinsamen Punktepaar x, y und $[\mathfrak{J}]$ eine Klasse paralleler Konjugien, die ξ und η nicht enthält und die Eigenschaft hat,

daß $[x_{\mathfrak{J}}]$ gleich $[y]$ ist. Sei π das eindeutig bestimmte Konjugium von $[\mathfrak{J}]$, welches x auf y abbildet.

Dann trennt $[\mathfrak{J}]$ die Konjugien ξ und η , wenn π zwischen ξ und η liegt.

- iv) Seien endlich ξ und η zwei nicht parallele Konjugien mit dem gemeinsamen Punktepaar x, y und a, b ein Punktepaar mit der Eigenschaft, daß a zu $[x]$ und b zu $[y]$ gehört.
- Dann trennt das Punktepaar a, b die Konjugien ξ und η , falls ein Konjugium ζ existiert, zu dem a, b gehört und das zwischen ξ und η liegt.

Kapitel 3 Die Geometrie der Konjugien

Wir definieren eine Inzidenzstruktur, deren Punkte die Konjugien sind, und weisen für diese die Axiome der 'Descriptive Geometry' von H.S.M. COXETER nach. Mit diesen Ergebnissen wird schließlich der Einbettungssatz gefolgert.

§ 1 Die Inzidenzstruktur der Konjugien

Im folgenden betrachten wir eine Inzidenzstruktur aus 'Punkten', 'Geraden' und 'Ebenen'.

Die 'Punkte' sind dabei die Konjugien.

Die 'Geraden' sind die Punktepaare zusammen mit den Klassen paralleler Konjugien.

Die 'Ebenen' sind die Kreise und die Paare von Klassen paralleler Punkte. Sie werden zur Unterscheidung mit 'Kreisebenen' und 'Parallelpaaerebenen' bezeichnet.

1. 1 Definition : Seien ξ und η Konjugien, und sei a, b ein Punktepaar. Dann liegt der 'Punkt' ξ auf der 'Geraden' (a, b) , wenn $a\xi$ gleich b ist und auf der 'Geraden' $([\eta])$, wenn $[\xi]$ und $[\eta]$ gleich sind.

1. 2 Definition : Sei ξ ein Konjugium, K ein Kreis und c, d ein Punktepaar. Der 'Punkt' ξ liegt in der

'Kreisebene' (K), falls K zu ξ gehört, und er liegt in der 'Parallelpaaebene' ($[c],[d]$), falls c_ξ zu d parallel ist.

1. 3 Definition : Seien a,b,c und d Punkte, K sei ein Kreis und η ein Konjugium. Die 'Gerade' (a,b) liegt in der 'Ebene' (K), falls a und b auf K liegen. Sie liegt in der 'Ebene' ($[c],[d]$), falls die 'Ebenen' ($[c],[d]$) und ($[a],[b]$) gleich sind. Die 'Gerade' ($[\eta]$) liegt in der 'Ebene' ($[c],[d]$), falls c_η parallel zu d ist. Sie liegt in keiner 'Kreisebene'.

1. 4 Satz : Die obigen Definitionen sind miteinander verträglich; d.h. inzidiert eine 'Gerade' mit einer 'Ebene', so inzidieren alle 'Punkte' der 'Geraden' mit dieser 'Ebene'.

Beweis : Sei ξ ein 'Punkt' auf der 'Geraden' (a,b). Liegt diese 'Gerade' in der 'Kreisebene' (K), so liegen a und b auf dem Kreis K. Es gilt $a_\xi = b$, und damit gehört der Kreis K zum Konjugium ξ . Also liegt der 'Punkt' ξ in der 'Ebene' (K). Liegt dagegen die 'Gerade' (a,b) in der 'Parallelpaaebene' ($[c],[d]$), so ist a parallel zu c, und b ist parallel zu d. Da a_ξ gleich b ist, sind c_ξ und d parallel. Also liegt der 'Punkt' ξ in der 'Ebene' ($[c],[d]$).

Ist ξ jedoch ein 'Punkt' auf der 'Geraden' $([\eta])$ und inzidiert $([\eta])$ mit der 'Ebene' $([c],[d])$, so sind c_η und d parallel und damit auch c_ξ und d . Also liegt der 'Punkt' ξ in der 'Ebene' $([c],[d])$.

1. 5 Satz : Sind λ und μ zwei 'Punkte' der 'Geraden' (a,b) , so besteht die 'Gerade' (a,b) aus allen 'Punkten' v , für die genau eine der folgenden Beziehungen zutrifft :

- i) v liegt zwischen λ und μ .
- ii) λ liegt zwischen v und μ .
- iii) μ liegt zwischen λ und v .
- iv) v ist gleich λ oder μ .

Beweis : Liegt der 'Punkt' v auf der 'Geraden' (a,b) und sei c ein Punkt von Λ , so daß der Kreis $K(a,b,c)$ existiert. Das Punktepaar a,b trennt dann das Punktepaar c, c_v , so daß eine der Bedingungen i) bis iv) erfüllt ist.

Da die Zwischenbeziehung nur für 'Punkte' auf einer 'Geraden' definiert ist, muß jedes Konjugium v , das einer der vier Bedingungen genügt, auf der eindeutig bestimmten 'Geraden' durch λ und μ liegen.

1. 6 Bemerkung : Wegen 2.3.3 und 2.3.5 Bemerkungen gilt obige Behauptung auch für die 'Parallelklassengeraden'.

§ 2 Das Pasch-Axiom

Satz : Seien ρ , σ und τ drei 'Punkte', die nicht auf einer 'Geraden' liegen. Ist δ ein weiterer 'Punkt' auf der 'Geraden' (σ, τ) durch σ und τ , der nicht zwischen σ und τ liegt und ϵ ein 'Punkt' auf der 'Geraden' (ρ, τ) durch ρ und τ , der zwischen ρ und τ liegt, dann existiert auf der 'Geraden' (ρ, σ) durch ρ und σ ein 'Punkt' γ zwischen ρ und σ , der dazu auf der 'Geraden' (δ, ϵ) durch δ und ϵ liegt (siehe Axiom D 7 aus 1.2.3 Definition).

Beweis :

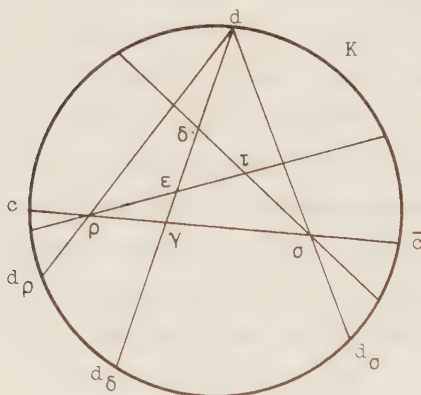
Fall 1 : Die 'Punkte' ρ , σ und τ liegen in der 'Kreisebene' (K).

Sei (d, d_δ) die 'Gerade' (δ, ϵ) durch δ und ϵ .

Wenn τ zwischen δ und σ liegt, so trennt auf dem Kreis K das Punktepaar d, d_τ das Punktepaar d_δ, d_σ und man erhält auf K die Reihenfolge $d d_\delta d_\tau d_\sigma d$. Liegt ϵ zwischen ρ und τ , hat man auf K die Reihenfolge $d d_\rho d_\delta d_\tau d$. Insgesamt ergibt sich also auf K die Reihenfolge $d d_\rho d_\delta d_\tau d_\sigma d$.

Also trennt das Punktepaar d, d_δ das Punktepaar d_ρ, d_σ . Sei nun $(c, \bar{c})$ die 'Gerade' (ρ, σ) . Aus der Definition der Konjugien ρ und σ folgt, daß das Punktepaar $c, \bar{c}$ die Punkte d_ρ, d_σ von d trennt. Somit läßt sich durch das Punktequadrupel $d, d_\delta, c, \bar{c}$ ein Konju-

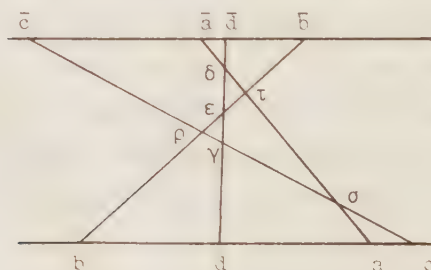
gium γ definieren, das auf der 'Geraden' $(c, \bar{c})$ zwischen den 'Punkten' ρ und σ liegt (Figur 3).



Fall 2 : Die 'Punkte' ρ, σ und τ liegen in der 'Parallelpaaerebene' $([c], [\bar{c}])$.

i) Seien $\rho, \sigma, \tau, \delta$ und ϵ paarweise nicht parallele Konjugien.

Sei $(c, \bar{c})$ die 'Gerade' (ρ, σ) , $(b, \bar{b})$ die 'Gerade' (ρ, τ) , $(a, \bar{a})$ die 'Gerade' (σ, τ) und $(d, \bar{d})$ die 'Gerade' (δ, ϵ) , so daß a, b und d zu c sowie $\bar{a}, \bar{b}$ und $\bar{d}$ zu $\bar{c}$ gehören (Figur 4).



Sei x ein Punkt, der nicht zu $[c]$ oder $[\bar{c}]$ gehört. Dann existieren die Kreise

$$K_1 := K(a, \bar{a}, x), \quad K_2 := K(b, \bar{b}, x),$$

$$K_3 := K(c, \bar{c}, x) \quad \text{und} \quad K_4 := K(d, \bar{d}, x).$$

Aus den Voraussetzungen ergeben sich die Reihenfolgen von Punkten auf

$$K_1 : x \ a \ x_\sigma \ x_\tau \ x_\delta \ \bar{a} \ x \quad \text{oder} \quad x \ a \ x_\delta \ x_\tau \ x_\sigma \ \bar{a} \ x,$$

$$K_2 : x \ b \ x_\tau \ x_\epsilon \ x_\rho \ \bar{b} \ x \quad \text{oder} \quad x \ b \ x_\rho \ x_\epsilon \ x_\tau \ \bar{b} \ x,$$

$$K_3 : \quad x \ c \ x_\sigma \ x_\rho \ \bar{c} \ x \quad \text{oder} \quad x \ c \ x_\rho \ x_\sigma \ \bar{c} \ x,$$

$$K_4 : \quad x \ d \ x_\delta \ x_\epsilon \ \bar{d} \ x \quad \text{oder} \quad x \ d \ x_\epsilon \ x_\delta \ \bar{d} \ x.$$

Da τ ein Konjugium ist, und die Punktepaare $a, \bar{a}$ und $b, \bar{b}$ zu τ gehören, schneiden sich die Kreise K_1 und K_2 in den beiden Punkten x und x_τ .

Analog schneiden sich wegen

σ die Kreise K_1 und K_3 in den Punkten x und x_σ ,

δ die Kreise K_1 und K_4 in den Punkten x und x_δ ,

ρ die Kreise K_2 und K_3 in den Punkten x und x_ρ ,

ϵ die Kreise K_2 und K_4 in den Punkten x und x_ϵ ,

δ die Kreise K_3 und K_4 in den Punkten z und z ,

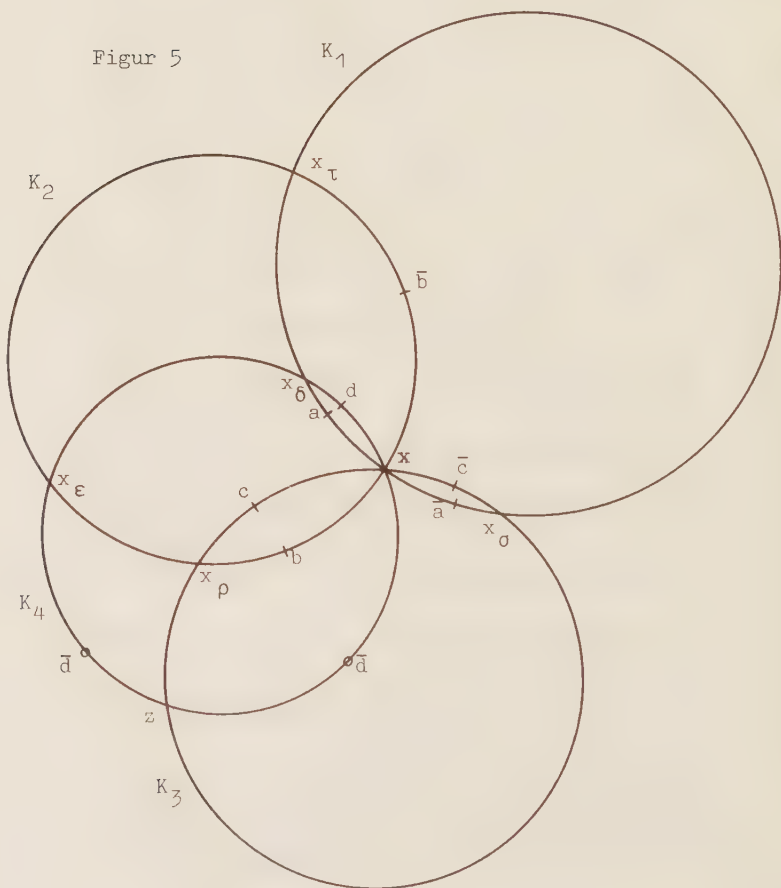
wobei z der existierende zweite Schnittpunkt der Kreise K_3 und K_4 ist.

Aus der Zeichnung (Figur 5) ergibt sich für die Punkte auf K_3 die Reihenfolge $x \ \bar{c} \ x_\rho \ z \ x_\sigma \ c \ x$. Projiziert man K_3 auf K_4 so erhält man die Reihenfolge von Punkten $x \ \bar{d} \ z \ d \ x$.

Die Kreise K_3 und K_4 schneiden sich so, daß die Schnittpunkte x und z die Punktepaare $c, \bar{c}$ und

$d, \bar{d}$ trennen. Also existiert das Konjugium γ ,
welches durch das Punktequadrupel $c, \bar{c}, d, \bar{d}$ be-
stimmt wird. Es ist somit $z = x_\gamma$ und γ liegt
auf den Geraden $(d, \bar{d})$ und $(c, \bar{c})$, hier zwischen
 ρ und σ .

Figur 5



ii) Die Konjugien δ und ϵ seien nun parallel, die Konjugien ρ , σ und τ weiter nicht parallel. Sei $[\mathfrak{A}]$ die 'Gerade' (δ, ϵ) , $(a, \bar{a})$ die 'Gerade' (σ, τ) , $(b, \bar{b})$ die 'Gerade' (ρ, τ) und $(c, \bar{c})$ die 'Gerade' (ρ, σ) , so daß a und b zu $[c]$ sowie $\bar{a}$ und $\bar{b}$ zu $[\bar{c}]$ gehören.

Wieder sei x ein Punkt, der nicht zu $[c]$ oder $[\bar{c}]$ gehört. Dann existieren die Kreise $K_1 := K(a, \bar{a}, x)$, $K_2 := K(b, \bar{b}, x)$ und $K_3 := K(c, \bar{c}, x)$. Die Schnittpunkte seien wie in i) bezeichnet. Nach 2.2.5 Satz existiert ein Konjugium γ , das zu $\mathfrak{A}$ parallel ist und zu dem K_3 gehört.

Aus den Voraussetzungen ergeben sich die Reihenfolgen von Punkten auf

$K_1 : x a x_\delta x_\tau x_\sigma \bar{a} x$ oder $x a x_\sigma x_\tau x_\delta \bar{a} x$
 $K_2 : x b x_\rho x_\epsilon x_\tau \bar{b} x$ oder $x b x_\tau x_\epsilon x_\rho \bar{b} x$.
 Die Parallelprojektion auf K_3 ergibt die Reihenfolgen von Punkten $x c x_\gamma x_\tau' x_\sigma \bar{c} x$ und
 $x c x_\rho x_\gamma x_\tau' \bar{c} x$.

Damit hat man nun auf K_3 die Reihenfolge von Punkten $x c x_\rho x_\gamma x_\sigma \bar{c} x$. Der gesuchte 'Punkt' γ liegt somit auf der 'Geraden' $(c, \bar{c})$ zwischen den 'Punkten' ρ und σ .

iii) Seien nun die Konjugien ρ und σ parallel, die Konjugien τ , δ und ϵ nicht parallel. Sei $[\mathfrak{A}]$ die 'Gerade' (ρ, σ) , $(a, \bar{a})$ die 'Gerade' (σ, τ) , $(b, \bar{b})$ die 'Gerade' (ρ, τ) und $(d, \bar{d})$ die

'Gerade' (δ, ϵ) , so daß a und b zu $[d]$ sowie $\bar{a}$ und $\bar{b}$ zu $[\bar{d}]$ gehören. Sei weiter x ein Punkt, der nicht zu $[d]$ oder $[\bar{d}]$ gehört.

Seien $K_1 := K(a, \bar{a}, x)$ und $K_2 := K(b, \bar{b}, x)$ zwei Kreise, die sich wegen τ in zwei Punkten x und x_τ schneiden. Man erhält die Reihenfolgen von Punkten auf

$$K_1 : x \ a \ x_\sigma \ x_\tau \ x_\delta \ \bar{a} \ x \text{ oder } x \ a \ x_\delta \ x_\tau \ x_\sigma \ \bar{a} \ x$$

$$K_2 : x \ b \ x_\tau \ x_\epsilon \ x_\rho \ \bar{b} \ x \text{ oder } x \ b \ x_\rho \ x_\epsilon \ x_\tau \ \bar{b} \ x.$$

Sei der Kreisbogen $B_1 := B(a, x_\delta, \bar{a})$ die Menge von Punkten aus K_1 zwischen a und $\bar{a}$, der auch der Punkt x_δ angehört.

$$\begin{aligned} \text{Die Abbildung } f_1 : \quad B_1 &\longrightarrow [\bar{a}] \\ y &\longmapsto K(d, x, y) \cap [\bar{a}] \end{aligned}$$

ist nach ([7], 1.1.a) ein Homöomorphismus.

Analog definiert man B_2 und f_2 mittels b und $\bar{b}$.

Da die Anordnung unter diesen Abbildungen erhalten bleibt, gelten auf $[\bar{a}]$ die Reihenfolgen von Punkten $d_\sigma \ d_\tau \ d_\delta$ und $d_\tau \ d_\delta \ d_\rho$.

Zusammen ergibt dies die Reihenfolge

$$d_\sigma \ d_\delta \ d_\rho.$$

Der wegen 2.2.5 Satz auf $[\mathfrak{J}]$ existierende

'Punkt' γ liegt also zwischen den 'Punkten' ρ und σ , da d_γ und d_δ gleich sind.

- iv) Seien nun die Konjugien δ , τ und σ parallel. Sei $[\mathfrak{J}]$ die 'Gerade' (σ, τ) , $(b, \bar{b})$ die 'Gerade' (ρ, τ) , $(c, \bar{c})$ die 'Gerade' (ρ, σ) und $(d, \bar{d})$ die

'Gerade' (δ, ϵ) , so daß b und c zu $[d]$ sowie $\bar{b}$ und $\bar{c}$ zu $[\bar{d}]$ gehören. Sei wieder x ein Punkt, der weder zu $[d]$ noch zu $[\bar{d}]$ gehört.

Seien $K_2 := K(b, \bar{b}, x)$ und $K_3 := K(c, \bar{c}, x)$ zwei Kreise, die sich wegen ρ in den beiden Punkten x und x_ρ schneiden. Man erhält die Reihenfolgen von Punkten auf

$$\begin{aligned} K_2 : & x \ b \ x_\rho \ x_\epsilon \ x_\tau \ \bar{b} \ x \text{ oder } x \ b \ x_\tau \ x_\epsilon \ x_\rho \ \bar{b} \ x \\ K_3 : & x \ c \ x_\rho \ x_\sigma \ \bar{c} \ x \text{ oder } x \ c \ x_\sigma \ x_\rho \ \bar{c} \ x . \end{aligned}$$

Analog iii) definiert man

$$\begin{aligned} f_2 : B_2 := B(b, x_\rho, \bar{b}) &\longrightarrow [\bar{d}] \\ &\quad y \longmapsto K(d, x, z) \cap [\bar{d}] \\ \text{und } f_3 : B_3 := B(c, x_\sigma, \bar{c}) &\longrightarrow [\bar{d}] \\ &\quad z \longmapsto K(d, x, z) \cap [\bar{d}] . \end{aligned}$$

Dabei gehen unter f_2 die Punkte x_ρ, x_ϵ und x_τ in die Punkte d_ρ, d_ϵ und d_τ sowie unter f_3 die Punkte x_ρ und x_σ in die Punkte d_ρ und d_σ . Da f_2 und f_3 Homöomorphismen sind, kann man auf $[\bar{d}]$ auf die Reihenfolge von Punkten

$d_\rho \ d_\epsilon \ d_\tau$ schließen. Nach Voraussetzung gilt auf $[\bar{d}]$ die Reihenfolge $d_\delta \ d_\tau \ d_\sigma$ und man erhält somit die Reihenfolge von Punkten

$d_\rho \ d_\epsilon \ d_\tau \ d_\sigma$ auf $[\bar{d}]$, da d_δ und d_ϵ zusammenfallen. Betrachtet man nun die Umkehrabbildung

g_3 von f_3 , so gilt $g_3(d_\rho) = K(x, d, d_\rho) \cap K_3 = x_\rho$.

Analog geht d_σ unter g_3 auf x_σ und d_ϵ auf einen Punkt $g_3(d_\epsilon)$ des Bogens B_3 , so daß sich

auf dem Kreis K_3 die Reihenfolge von Punkten $x \ c \ x_\rho \ g_3(d_\epsilon) \ x_\sigma \ \bar{c} \ x$ ergibt. Also läßt sich ein Konjugium $\gamma := \kappa(c, \bar{c}, x, g(d_\epsilon))$ bestimmen, das auf der 'Geraden' $(c, \bar{c})$ zwischen den 'Punkten' ρ und σ liegt. Nach Konstruktion bildet das Konjugium den Punkt d auf d_ϵ ab.

- v) Sind die Konjugien ρ, τ und ϵ parallel, so folgt der Beweis analog iv).

§ 3 Weitere Axiome der deskriptiven Geometrie

3.1 Satz : Seien ξ und η zwei 'Punkte', und sei Γ eine 'Gerade', die ξ und η trennt. Dann existiert ein 'Punkt' ξ auf Γ , der zwischen ξ und η liegt (siehe 2.3.6 Definition).

Beweis :

Fall 1 : Die 'Punkte' ξ und η sowie die 'Gerade' Γ liegen in einer 'Kreisebene' (K) .

Dann ist die 'Gerade' Γ ein Punktepaar (a, b) , wobei a und b Punkte aus K sind. Die Konjugien ξ und η sind nicht parallel und der Kreis K gehört zu beiden Konjugien. Also liegen die Punkte a_ξ und a_η auf K . Da ξ und η nicht parallel sind, existiert ein Punkt c , der nicht auf K liegt, so daß die Punkte c_ξ und c_η nicht parallel sind. O.B.d.A. kann man annehmen, daß c nicht parallel zu a, a_ξ und a_η ist.

Fall 2 : Die 'Punkte' ξ und η sowie die 'Gerade' Γ liegen in der 'Parallelpaaerebene' $([c],[d])$.

- i) Seien ξ und η zwei parallele Konjugien und Γ die 'Gerade' (a,b) , wobei die Punkte a und b zu $[c]$ und $[d]$ gehören. Dann existiert nach 2.2.5 Satz ein Konjugium auf $[\xi]$, zu dem das Punktepaar a,b gehört. Dieses liegt nach 2.3.6 Definition zwischen ξ und η .
- ii) Seien ξ und η zwei nicht parallele Konjugien und Γ eine Klasse paralleler Konjugien. Dann folgt die Behauptung aus der Definition.
- iii) Seien ξ und η zwei nicht parallele Konjugien und Γ die 'Gerade' (a,b) , wobei die Punkte a und b zu $[c]$ und $[d]$ gehören. Wieder folgt die Behauptung sofort aus der Definition.

3. 2 Satz : Seien ρ, σ und τ drei nicht kollineare 'Punkte' und ζ ein 'Punkt', welcher in der durch ρ, σ und τ bestimmten 'Ebene' liegt. Dann existieren 'Punkte' δ und ϵ , von denen jeder entweder zwischen ρ und σ oder zwischen σ und τ oder zwischen ρ und τ liegt, so daß ζ auf der 'Geraden' durch δ und ϵ liegt.

Beweis : Falls der 'Punkt' ζ auf einer 'Dreiecksseite' liegt, ist man fertig.

Fall 1 : Die 'Punkte' ρ, σ, τ und ζ liegen in der

'Kreisebene' (K), sind also paarweise nicht parallel.

Sei $(a, \bar{a})$ die 'Gerade' (σ, τ) , $(b, \bar{b})$ die 'Gerade'

(ρ, τ) und $(c, \bar{c})$ die 'Gerade' (ρ, σ) , wobei die

Punkte $a, \bar{a}, b, \bar{b}, c$ und $\bar{c}$ auf dem Kreis K liegen. Der

'Punkt' ζ liege auf keiner der obigen 'Geraden'.

Sei nun δ ein 'Punkt' auf $(c, \bar{c})$, der zwischen den

'Punkten' ρ und σ liegt. Die 'Gerade' (δ, ζ) heiße

$(d, \bar{d})$ mit den Punkten d und $\bar{d}$ auf dem Kreis K.

Stets hat man auf K die Reihenfolge von Punkten

$$c \ b \ a \ \bar{c} \ \bar{b} \ \bar{a} \ c .$$

Aus der Existenz der Konjugien ρ, σ und δ erhält

man die Reihenfolgen $d \ b \ d_\rho \ \bar{b} \ d$,

$$d \ a \ d_\sigma \ \bar{a} \ d \text{ und}$$

$$d \ c \ d_\delta \ \bar{c} \ d .$$

Weiter trennen sich die Punktepaare d, d_δ und d_ρ, d_σ .

Außerdem trennt das Punktepaar $c, \bar{c}$ den Punkt d von

den zu ihm konjugierten Punkten d_ρ, d_σ und d_δ .

a) Es gelte nun die Reihenfolge $\bar{a} \ c \ d \ b \ a \ \bar{c}$.

i) Gilt die Reihenfolge $c \ d \ \bar{c} \ d_\rho \ d_\delta \ d_\sigma \ c$, so

erhält man entweder $\bar{a} \ c \ d \ b \ a \ \bar{c} \ d_\rho \ d_\delta \ d_\sigma \ \bar{b} \ \bar{a}$

oder $\bar{a} \ c \ d \ b \ a \ \bar{c} \ d_\rho \ d_\delta \ \bar{b} \ d_\sigma \ \bar{a}$

oder $\bar{a} \ c \ d \ b \ a \ \bar{c} \ d_\rho \ b \ d_\delta \ d_\sigma \ \bar{a}$

als Reihenfolgen von Punkten auf K. Immer tren-

nen sich die Punktepaare d, d_δ und $a, \bar{a}$. Also

existiert das Konjugium $\kappa(d, \bar{d}, a, \bar{a})$, und die Be-

hauptung folgt aus dem Pasch-Axiom.

ii) Gilt die Reihenfolge $c d \bar{c} d_0 d_\delta d_\rho c$, so erhält man $\bar{a} c d b a \bar{c} d_0 d_\delta d_\rho \bar{b} \bar{a}$ als weitere Reihenfolge von Punkten, da sich die Punktepaare d, d_ρ und $b, \bar{b}$ auf K trennen. Die Behauptung folgt dann wie in i).

b) Es gelte nun die Reihenfolge $c b d a \bar{c} \bar{b} \bar{a} c$.

i) Gilt die Reihenfolge $c b d a \bar{c} d_0 \bar{b} \bar{a} c$ und hat man zunächst die Reihenfolge $a \bar{c} d_\rho d_\delta d_0 c$, so folgt die Reihenfolge von Punkten $c b d a \bar{c} \bar{b} d_\rho d_\delta d_0 \bar{a} c$ und man ist fertig, da sich die Punktepaare $a, \bar{a}$ und $d, \bar{d}$ auf dem Kreis K trennen. Hat man dagegen die Reihenfolge $a \bar{c} d_0 d_\delta d_\rho c$, so können diese Reihenfolgen von Punkten auftreten:

$c b d a \bar{c} d_0 d_\delta \bar{b} d_\rho \bar{a} c$.

$c b d a \bar{c} d_0 \bar{b} \bar{a} d_\rho \bar{b} \bar{a} c$.

$c b d a \bar{c} d_0 \bar{b} \bar{a} d_\rho \bar{b} \bar{a} c$.

$c b d a \bar{c} d_0 d_\delta \bar{b} \bar{a} d_\rho c$ und

$c b d a \bar{c} d_0 \bar{b} \bar{a} d_\delta d_\rho c$.

In den ersten vier Fällen trennen sich die Punktepaare $d, \bar{d}$ und $a, \bar{a}$ und im letzten die Punktepaare $d, \bar{d}$ und $b, \bar{b}$. Jeweils läßt sich also das geforderte Konjugium definieren.

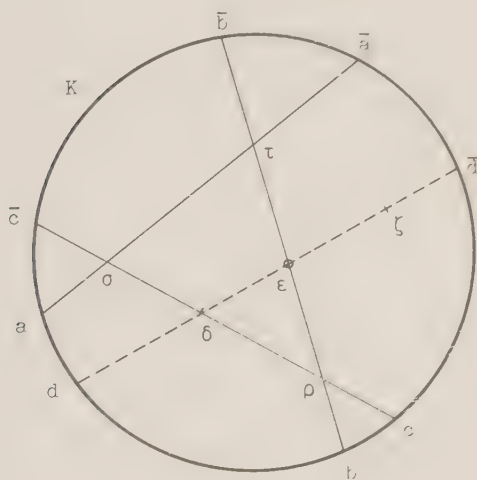
ii) Gilt die Reihenfolge $c b d a \bar{c} \bar{b} d_0 \bar{a} c$, so führt die Reihenfolge $a \bar{c} d_\rho d_\delta d_0 c$ auf $c b d a \bar{c} \bar{b} d_\rho d_\delta d_0 \bar{a} c$. Also trennen sich

die Punktepaare $a, \bar{a}$ und $d, \bar{d}$.

Dagegen führt die Reihenfolge $a \bar{c} d_{\sigma} d_{\delta} d_{\rho} c$
auf $c b d a \bar{c} \bar{b} d_{\sigma} d_{\delta} \bar{a} d_{\rho} c$ oder

$c b d a \bar{c} \bar{b} d_{\sigma} \bar{a} d_{\delta} d_{\rho} c$ als Reihen-
folgen von Punkten auf K . Das eine Mal trennen
sich die Punktepaare d, d_{δ} und $a, \bar{a}$, das andere
Mal d, d_{δ} und $b, \bar{b}$.

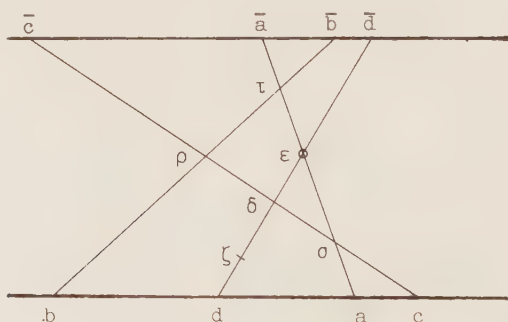
c) Die Reihenfolge $c b a d \bar{c} \bar{b} \bar{a} c$ wird analog a)
behandelt.



Figur 7

Fall 2 : Die 'Punkte' ρ, σ, τ und ζ liegen in der 'Parallelpaaerebene' $([a], [\bar{a}])$.

Sei $(a, \bar{a})$ die 'Gerade' (σ, τ) , $(b, \bar{b})$ die 'Gerade' (ρ, τ) und $(c, \bar{c})$ die 'Gerade' (ρ, σ) . Sei δ ein 'Punkt' auf $(c, \bar{c})$, der zwischen ρ und σ liegt. $(d, \bar{d})$ sei die 'Gerade' (δ, ζ) , wobei die Punkte b, c und d in $[a]$ sowie $\bar{b}, \bar{c}$ und $\bar{d}$ in $[\bar{a}]$ liegen. Dann sind die Konjugien ρ, σ und τ nicht parallel. O.B.d.A. sind auch die Konjugien δ und ζ nicht parallel (Figur 8).



Sei x ein Punkt, der weder in $[a]$ noch in $[\bar{a}]$ liegt.

Dann existieren die Kreise

$$K_1 := K(a, \bar{a}, x), \quad K_2 := K(b, \bar{b}, x),$$

$$K_3 := K(c, \bar{c}, x) \quad \text{und} \quad K_4 := K(d, \bar{d}, x).$$

Da ρ ein Konjugium ist, und die Punktepaare $a, \bar{a}$ und $b, \bar{b}$ zu ρ gehören, schneiden sich die Kreise K_1 und K_2 in den beiden Punkten x und x_ρ . Analog schneiden sich wegen

σ die Kreise K_1 und K_3 in den Punkten x und x_σ ,
 ρ die Kreise K_2 und K_3 in den Punkten x und x_ρ ,
 δ die Kreise K_3 und K_4 in den Punkten x und x_δ .
 Schneiden sich die Kreise K_2 und K_4 in den beiden
 Punkten x und y , so daß das Punktepaar x, y das
 Punktepaar $b, \bar{b}$ auf K_2 und das Punktepaar $d, \bar{d}$ auf K_4
 trennt, dann existiert ein Konjugium, zu dem $b, \bar{b}$
 und $d, \bar{d}$ gehören, und die Behauptung folgt aus dem
 Pasch-Axiom.

Trennt dagegen das Punktepaar x, y das Punktepaar $b, \bar{b}$
 und das Punktepaar $d, \bar{d}$ nicht, dann schneiden sich
 die Kreise K_1 und K_4 in den Punkten x und z . Weiter
 trennt das Punktepaar x, z das Punktepaar $a, \bar{a}$ auf K_1
 und das Punktepaar $d, \bar{d}$ auf K_4 .

Dies schließt man folgendermaßen :

Aus den Voraussetzungen ergeben sich die Reihenfolgen
 von Punkten auf

$$\begin{aligned} K_1 : & \quad x a x_\sigma x_\tau \bar{a} x \quad \text{oder} \quad x a x_\tau x_\sigma \bar{a} x, \\ K_2 : & \quad x b x_\rho x_\tau \bar{b} x \quad \text{oder} \quad x b x_\tau x_\rho \bar{b} x, \\ K_3 : & \quad x c x_\rho x_\delta x_\sigma \bar{c} x \quad \text{oder} \quad x c x_\sigma x_\delta x_\rho \bar{c} x, \\ K_4 : & \quad x d x_\delta x_\zeta \bar{d} x \quad \text{oder} \quad x d x_\zeta x_\delta \bar{d} x. \end{aligned}$$

Da das Parallelprojizieren von K_1 auf K_4 ein Homöo-
 morphismus ist, trennt auf K_4 das Punktepaar x, z das
 Punktepaar $d, \bar{d}$. Somit läßt sich das Konjugium

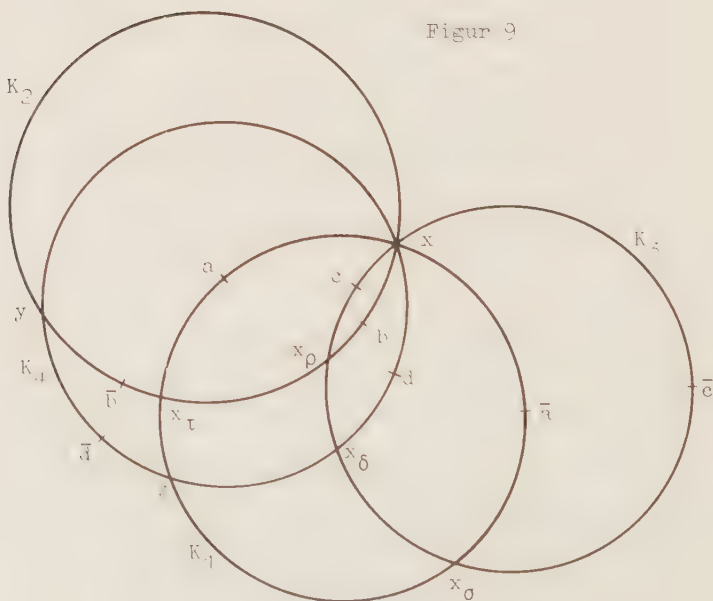
$\epsilon := \kappa(x, z, d, \bar{d})$ definieren, und es gilt $a_\epsilon = \bar{a}$, da
 die Punkte a und d parallel sind.

Da auf dem Kreis K_1 die Reihenfolge der Punkte

$a \times \bar{a} \times_{\tau} x_{\epsilon} \times_{\sigma} a$ ist, liegt der 'Punkt' ϵ zwischen den 'Punkten' τ und σ . Damit ist der Satz bewiesen (Figur 9).

Zu betrachten bleibt noch der Fall, daß die Konjugien ρ und τ parallel sind. Dann schneidet aber die 'Gerade' (δ, ζ) die 'Gerade' $([\rho])$ und die Behauptung des Satzes folgt aus dem Pasch-Axiom.

Figur 9



3.4 Satz : Zwei 'Ebenen', die einen gemeinsamen 'Punkt' besitzen, haben noch einen weiteren gemeinsam.

Beweis :

Fall 1 : Seien (K_1) und (K_2) zwei 'Kreisebenen', die den 'Punkt' ζ gemeinsam haben, d.h. die Kreise K_1 und K_2 gehören beide zum Konjugium ζ . Aus der Definition des Konjugiums folgt, daß sich K_1 und K_2 in zwei Punkten schneiden, die mit a und $\bar{a} = a_\zeta$ bezeichnet seien. Seien a und b_ζ zwei weitere Punkte von K_1 derart, daß $b_\zeta \neq \bar{a}$, und das Punktepaar a, b_ζ das Punktepaar $a, \bar{a}$ trennt. Dann ist durch $\kappa(a, \bar{a}, b, b_\zeta)$ ein Konjugium ξ definiert, zu welchem beide Kreise gehören.

Fall 2 : Sei (K) eine 'Kreisebene' und $([a], [\bar{a}])$ eine 'Paralleelpaarebene'. Der gemeinsame 'Punkt' sei ζ . Dann existieren auf K zwei Punkte b und $\bar{b}$, wobei b zu $[a]$ und $\bar{b}$ zu $[\bar{a}]$ gehört. Es gilt $\bar{b} = b_\zeta$. Seien nun x und x_ζ weitere Punkte von K derart, daß x_ζ von x verschieden ist, und das Punktepaar $a, \bar{b}$ das Punktepaar x, x_ζ trennt. Dann ist durch $\kappa(a, \bar{b}, x, x_\zeta)$ ein weiterer 'Punkt' ξ definiert, der zu beiden 'Ebenen' gehört.

Fall 3 : Seien $([a], [\bar{a}])$ und $([b], [\bar{b}])$ zwei 'Paralleelpaarebenen' und ζ deren gemeinsamer 'Punkt'. Dann existieren Punkte $c, \bar{c}, d$ und $\bar{d}$, wobei c zu $[a]$, $\bar{c}$ zu $[\bar{a}]$, d zu $[b]$ und $\bar{d}$ zu $[\bar{b}]$ gehören, sowie c_ζ gleich $\bar{c}$ und d_ζ gleich $\bar{d}$ ist. Dann leistet jedes zu ζ parallele Konjugium ξ das Verlangte.

3.5 Bemerkung : Da die 'Geraden' homöomorph zu $\mathbb{R}$ sind, gilt Axiom D 10 aus 1.2.3 Definition.

§ 4 Der Einbettungssatz

Theorem : Jede lokalkompakte zusammenhängende topologische Laguerreebene Λ der Dimension zwei, in welcher der Büschelsatz gilt, läßt sich in den dreidimensionalen reellen projektiven Raum einbetten, so daß die Kreise und Paare von Klassen paralleler Punkte die ebenen Schnitte mit Λ sind.

Beweis : Nach ([8], 3.8.) ist in einer zweidimensionalen lokalkompakten zusammenhängenden topologischen Laguerreebene Λ der Punktraum $\mathbb{P}$ homöomorph zu $S \times \mathbb{R}$. Die Kreise sind dann Jordankurven. Mit den Sätzen dieses Kapitels hat man nachgewiesen, daß der Raum der Konjugien die Axiome der 'Descriptive Geometry' nach Coxeter erfüllt. Durch Hinzufügen idealer Elemente bettet Coxeter diese 'Descriptive Geometry' in den dreidimensionalen reellen projektiven Raum ein ([5], S.160). Hier bilden die Konjugien eine konvexe Teilmenge und die Kreise und Klassen paralleler Punkte liegen wegen 2.2.8 Satz in Ebenen.

Teil B

Die analytischen topologischen
Laguerre- und Minkowskiebenen

§ 1 Analytische Laguerre- und Minkowskiebene

1. 1 Definition : Eine Minkowskiebene M ist eine Inzidenzstruktur, die aus einer Punktmenge $\mathbb{P}$, einer Kreismenge K , einer Inzidenzrelation I auf $\mathbb{P} \times K$ und aus zwei nicht trivialen Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{P}$ - der Plusparallelität und der Minusparallelität - besteht, so daß folgende Axiome erfüllt sind :

- M 1 : Durch drei Punkte, die paarweise weder plus- noch minusparallel sind, geht genau ein Kreis.
- M 2 : Zu jedem Kreis K und zu jedem Punkt p , der nicht auf K liegt, existiert für jeden Punkt q , der auf K liegt und weder plus- noch minusparallel zu p ist, ein Kreis L durch p und q , der mit K nur den Punkt q gemeinsam hat.
- M 3 : Auf jedem Kreis K existieren zu jedem Punkt p genau ein zu p plusparalleler Punkt und genau ein zu p minusparalleler Punkt.
- M 4 : Zu zwei Punkten p und q , die weder plus- noch minusparallel sind, existiert genau ein Punkt x , der zu p plusparallel und zu q minusparallel ist.
- M 5 : Es gibt einen Kreis K , der mindestens vier Punkte enthält und einen weiteren Punkt, der nicht auf K liegt.

1.2 Bemerkung : Wie in Teil A für Laguerreebenen, so lassen sich hier für Minkowskiebenen mit Hilfe der Axiome M 1 bis M 3 die Funktionen des Verbindens, Berührens und Parallelprojizierens definieren und ebenso die Funktion des Schneidens von Kreisen.

1.3 Definition : Eine topologische Minkowskiebene ist nach [13] eine Minkowskiebene, deren Punktraum $\mathbb{P}$ und Kreisraum $\mathbb{K}$ Topologien tragen, so daß die geometrischen Operationen stetig sind. Dies sind die folgenden Abbildungen :

$$\text{Verbinden} : \alpha : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, x_3) \longmapsto K, \text{ mit } \{x_1, x_2, x_3\} \subset K.$$

Dabei bezeichnet $\mathbb{P}^3$ die Menge der Tripel paarweise verbindbarer Punkte.

$$\text{Berühren} : \beta : (\mathbb{P} \times \mathbb{P} \times \mathbb{K})' \longrightarrow \mathbb{K} \\ (p, q, K) \longmapsto L, \\ \text{mit } \{p, q\} \subset L \text{ und } L \cap K = \{q\}. \text{ Dabei ist} \\ (\mathbb{P} \times \mathbb{P} \times \mathbb{K})' := \{(p, q, K) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P} \times \mathbb{K} \mid q \parallel_+ p, q \parallel_- p, q \in K\},$$

und damit ist L der Berührkreis von p an K in q.

$$\text{Schneiden} : \gamma : \mathbb{K}^{2'} \longrightarrow \mathbb{P}^{2*} \\ (K, L) \longmapsto (x, y), \text{ mit } \{x, y\} \subset K \cap L.$$

Dabei ist $\mathbb{K}^{2'}$ die Menge der Paare nicht disjunkter Kreise und $\mathbb{P}^{2*}$ das symmetrische Produkt von $\mathbb{P}$.

$$\text{Parallelprojizieren} : \pi_+ : \mathbb{P} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{P} \\ (p, K) \longmapsto p^+, \\ \text{mit } p \parallel_+ p^+ \text{ und } p^+ \in K.$$

$$\begin{aligned}\pi_- : \mathbb{P} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (p, K) &\longmapsto p^-, \text{ mit } p \parallel_- p^- \text{ und } p^- \in K. \\ \pi : \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P} \\ (p, q) &\longmapsto x, \text{ mit } p \parallel_+ x \text{ und } q \parallel_- x.\end{aligned}$$

1.4 Definition : Eine analytische Laguerreebene bzw.

analytische Minkowskiebene ist eine topologische Laguerreebene bzw. Minkowskiebene, deren Punktraum $\mathbb{P}$ und Kreisraum $\mathbb{K}$ komplex-analytische Mannigfaltigkeiten sind, die folgenden Bedingungen genügen :

i) Die Menge der Punkte eines Kreises ("Punktreihen") und die Klassen paralleler Punkte sind komplex-analytische Teilmannigfaltigkeiten der Mannigfaltigkeit $\mathbb{P}$.

Die Menge der Kreise durch einen Punkt, die Berührbüschel, die Berührreihen und die Menge der Kreise durch zwei nicht parallele Punkte sind komplex-analytische Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{K}$.

ii) Die Abbildungen des Verbindens, Berührens, Parallelprojizierens und Schneidens sind analytisch.

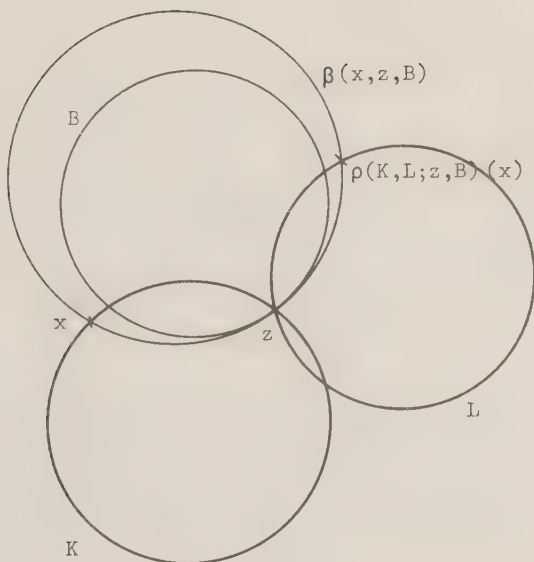
§ 2 Die Gruppen der Projektivitäten

2.1 Definition : In einer Minkowskiebene nennt man nach [13] folgende Abbildungen zwischen zwei Kreisen K und L Perspektivitäten :

- i) Haben K und L den Punkt z gemeinsam und ist B ein weiterer Kreis durch z, der weder K noch L berührt, so definiert man die Perspektivität

$$\rho(K, L; z, B) : K \longrightarrow L$$

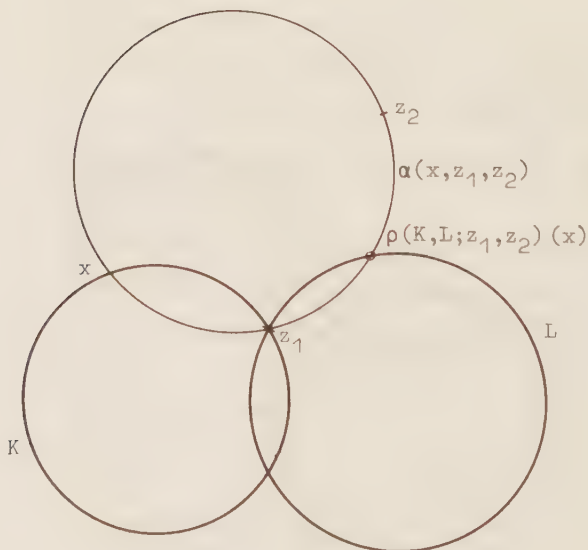
$$x \mapsto \begin{cases} \{\gamma(\beta(x, z, B), L)\} \setminus \{z\} , \\ \text{falls } x \neq z . \\ z , \text{ falls } x = z . \end{cases}$$



ii) Haben K und L den Punkt z_1 gemeinsam und ist z_2 ein Punkt, der weder auf K noch auf L liegt, so definiert man $\rho(K, L; z_1, z_2)$:

$$K \longrightarrow L$$

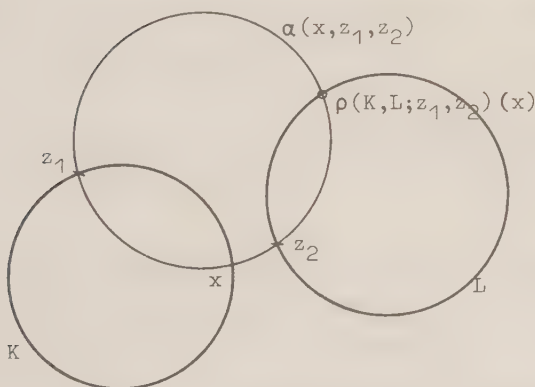
$$x \longmapsto \begin{cases} \{\gamma(L, \alpha(x, z_1, z_2))\} \setminus \{z_1\}, & \text{falls } z_2 \nparallel x, z_1; |\alpha(x, z_1, z_2) \cap L| = 2, \\ z_1, & \text{falls } z_2 \nparallel x, z_1; \alpha(x, z_1, z_2) \cap L = \{z_1\}, \\ \gamma(L, \beta(z_2, z_1, K)), & \text{falls } x = z_1; z_1 \nparallel z_2, \\ \pi_-(x, L), & \text{falls } z_1 \parallel_+ z_2, \\ \pi_+(x, L), & \text{falls } z_1 \parallel_- z_2, \\ \pi_-(z_2, L), & \text{falls } x \neq z_1; x \parallel_+ z_2; z_1 \nparallel z_2, \\ \pi_+(z_2, L), & \text{falls } x \neq z_1; x \parallel_- z_2; z_1 \nparallel z_2. \end{cases}$$



iii) Ist z_1 ein Punkt auf K , der nicht auf L liegt und z_2 ein Punkt auf L , der nicht auf K liegt, so definiert man $\rho(K, L; z_1, z_2)$:

$$K \longrightarrow L$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \gamma(\alpha(x, z_1, z_2), L) \setminus \{z_2\}, & \text{falls } z_2 \nparallel x, z_1; |\alpha(x, z_1, z_2) \cap L| = 2, \\ z_2, & \text{falls } z_2 \nparallel x, z_1; \alpha(x, z_1, z_2) \cap L = \{z_2\}, \\ \gamma(\beta(z_2, z_1, K), L) \setminus \{z_2\}, & \text{falls } x = z_1; z_1 \nparallel z_2, \\ \pi_-(x, L), & \text{falls } z_1 \parallel_+ z_2, \\ \pi_+(x, L), & \text{falls } z_1 \parallel_- z_2, \\ \pi_-(z_1, L), & \text{falls } z_1 \nparallel z_2; x \parallel_+ z_2, \\ \pi_+(z_1, L), & \text{falls } z_1 \nparallel z_2; x \parallel_- z_2. \end{cases}$$



Eine entsprechende Definition der Perspektivitäten in Laguerreebenen findet man zum Beispiel in [6] oder [12] .

2. 2 Lemma : Die Perspektivitäten einer analytischen Laguerreebene bzw. einer analytischen Minkowskiebene mit kompakten Kreisen sind analytisch.

Beweis : Da die Laguerreebene lokaleuklidisch ist, ist sie nach ([7], 2.7 Satz) zusammenhängend und damit nach ([8], 2.7 Satz) kohärent. Also sind die Perspektivitäten nach ([7], 3.2.b) stetig. Die Perspektivitäten sind aus den analytischen Abbildungen des Verbindens, Berührens, Schneidens und Parallelprojizierens zusammengesetzt und somit nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz selbst analytisch. Der Beweis für analytische Minkowskiebenen mit kompakten Kreisen folgt wie oben, wenn man benutzt, daß nach [13] dort die Perspektivitäten stetig sind.

2. 3 Definition : Hintereinanderausführungen von Perspektivitäten werden Projektivitäten genannt.

2. 4 Lemma : Die Gruppe der Projektivitäten eines Kreises auf sich einer analytischen Laguerreebene bzw. einer analytischen Minkowskiebene mit kompakten Kreisen ist eine Gruppe analytischer Abbildungen. Sie ist dreifach transitiv.

Beweis : Da die Projektivitäten durch Hintereinanderausführen analytischer Abbildungen entstehen, sind

sie analytisch. Die betrachteten Kreisebenen sind kohärent, und deshalb sind die Kreise nach ([7], 3.3) bzw. ([13]) dreifach homogen.

2.5 Lemma : In einer analytischen Laguerreebene sind die Kreise homöomorph zu S_1 oder S_2 .

Beweis : Nach ([8], 3.1) sind die Kreise homöomorph zu S_1 , S_2 , S_4 oder S_8 . Da es nach ([3], 3.8 Korollar) keine lokalkompakten topologischen Laguerreebenen einer endlichen Dimension $d > 4$ gibt, kommen nur S_1 und S_2 in Frage.

2.6 Bemerkung : Nach ([13]) läßt sich in einer im Punkt p abgeleiteten Unterebene einer topologischen Minkowskiebene eine Ternäroperation τ definieren, indem man als Grundgeraden zwei Klassen paralleler Punkte, $[r]_+$ und $[r]_-$, wählt. Es gilt :

Falls $s \neq 0$: $\tau(s, x, q) = y \iff (0, y) = \pi[\pi_-(x, 0), \beta((0, q), p, \alpha((1, s), (0, 0), p)), (0, 0)]$

und falls $s = 0$: $\tau(s, x, q) = y \iff (0, y) = \pi[\pi((0, q), (x, 0)), (0, 0)] = (0, q)$.

τ und τ^{-1} (siehe [13]) sind stetig auf $R \setminus \{0\} \times R^2$, wobei $R := [r]_+ \setminus \{\pi(r, p)\}$ ist. Außerdem sind $\tau|_{\{0\} \times R^2}$ und $\tau|_{R^2 \times \{0\}}$ sowie deren Umkehrungen stetig.

Die Ternäroperation τ und ihre Umkehrung werden stetig auf R^3 , falls zusätzlich zu den Kohärenzaxiomen

aus [13] folgendes Kohärenzaxiom K 8 gilt :

K 8 : Seien a und b nicht parallele Punkte und c_n bzw. d_n Punktfolgen, die gegen c bzw. d konvergieren. Die Punkte a, c und d seien paarweise verbindbar und b sei plusparallel zu d .

Dann gilt :

$$c_n \rightarrow c, d_n \rightarrow d \implies \beta(c_n, a, \alpha(a, d_n, b)) \rightarrow [c]_+ \cup [a]_-.$$

Dieses Axiom erfaßt die Stetigkeit des Parallelenziehens in der im Punkte a abgeleiteten Unterebene.

Damit hat man die abgeleitete Unterebene stetig in eine topologische dualaffine Ebene eingebettet, die sich topologisch in eine topologische projektive Ebene einfügen läßt ([7], 1.6.a). Aus den Kreisen der Minkowskiebene erhält man dort topologische Ovale. Es gibt jedoch keine topologischen Ovale in einer kompakten projektiven Ebene endlicher Dimension $d > 4$ [3]. Man kann daher obiges Lemma für Minkowskiebeneen formulieren.

2. 7 Lemma : In einer analytischen K 8 -kohärenten Minkowskiebene mit kompakten Kreisen sind die Kreise homöomorph zu S_1 oder S_2 .

Beweis : Dies folgt wie in 2.5 Lemma mit [13].

2. 8 Lemma : Die Gruppen der Projektivitäten einer analytischen Laguerreebene und einer analytischen K 8 -kohärenten Minkowskiebene mit kompakten Kreisen sind Liegruppen.

Beweis : Die Projektivitäten sind - nach den Forderungen an die Punktreihen - pseudokonforme Abbildungen, d.h. analytisch in einem komplexen Gebiet. Nach [4] folgt dann die Behauptung.

§ 3 Die Einzigkeit analytischer Laguerre- und Minkowskiebenen

3. 1 Theorem : Eine analytische Laguerreebene Λ ist die klassische Laguerreebene $\Sigma(L, \mathbb{C})$, wobei L die dualen Zahlen über $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Beweis : Die Gruppen der analytischen Projektivitäten der Sphäre auf sich sind lokalkompakt, weiterhin ist Λ lokalkompakt und nicht total unzusammenhängend. Die Behauptung folgt dann nach [14].

3. 2 Theorem : Eine analytische K 8 -kohärente Minkowskiebene mit kompakten Kreisen ist die klassische Minkowskiebene $\Sigma(\tilde{L}, \mathbb{C})$, wobei $\tilde{L}$ die anormalen Zahlen über $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Beweis : Die Behauptung folgt wie oben.

3. 3 Bemerkung : Da wegen [9] keine analytischen Möbius-ebenen mit lokaleuklidischen Kreisen existieren, kann man das Ergebnis (unter Beachtung der K 8-Kohärenz im Minkowskifall) auch folgendermaßen formulieren :

Jede komplex-analytische Kreisgeometrie mit kompakten Kreisen ist entweder die klassische miquelsche Laguerre-ebene im komplexen dreidimensionalen projektiven Raum oder die klassische Minkowskiebene der ebenen Schnitte einer irreduziblen komplexen Quadrik im komplexen dreidimensionalen projektiven Raum.

Literaturverzeichnis

- [1] ALTRICHTER, V., Projektive Laguerreebenen und vierdimensionale lokalkompakte zusammenhängende topologische Laguerreebenen, in denen der Büschelsatz gilt, Dissertation Erlangen 1980.
- [2] BREITSPRECHER, S., Einzigkeit der reellen und der komplexen projektiven Ebene,
Math. Z. 99, 429-432, (1967).
- [3] BUCHANAN, T., HÄHL, H., LÖWEN, R., Topologische Ovale,
Erscheint in Geometriae Dedicata.
- [4] CARTAN, H., Sur les groupes transformation analytiques,
Hermann & Cie., Editeurs, Paris 1935.
- [5] COXETER, H.S.M., Non-Euclidean Geometry, University of
Toronto Press, Toronto 1947, 5th Edition 1965.
- [6] FREUDENTHAL, H., STRAMBACH, K., Schließungssätze und
Projektivitäten in der Möbius- und Laguerre-
geometrie, Math. Z. 143, 213-234, (1975).
- [7] GROH, H.-J., Topologische Laguerreebenen I, Abh. Math.
Sem. Univ. Hamburg 32, 216-231, (1967).
- [8] GROH, H.-J., Topologische Laguerreebenen II, Abh. Math.
Sem. Univ. Hamburg 34, 11-21, (1969).

- [9] GROH, H.-J., Moebius Planes with Locally Euclidean Circles Are Flat, Math. Ann. 201, 149-156, (1973).
- [10] HESSELBACH, B., Über zwei Vierecksätze der Kreisgeometrie, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 9, 265-271, (1933).
- [11] ROBINSON, G. de B., The Foundations of Geometry, University of Toronto Press, Toronto 1963⁴.
- [12] SCHENKEL, A., Differenzierbare Möbius- und Laguerre-ebenen, Diplomarbeit Erlangen 1977.
- [13] SCHENKEL, A., Topologische Minkowskielebenen, Entwurf einer Dissertation.
- [14] STRAMBACH, K., Der von Staudtsche Standpunkt in lokal-kompakten Geometrien, Math. Z. 155, 11-21, (1977).

Lebenslauf

Am 2. Juni 1952 wurde ich, Wolfgang Scholz, als zweiter von drei Söhnen des Postbeamten Josef Scholz und seiner Ehefrau Hedwig Scholz, geb. Jüttner, in Nürnberg geboren. Im September 1958 trat ich in die Volksschule Nürnberg Dunantstraße ein und besuchte ab 1962 das Mathematisch-Naturwissenschaftliche Dürer-Gymnasium in Nürnberg, wo ich im Jahre 1971 auch das Abitur ablegte.

Zum Wintersemester 1971/72 nahm ich das Studium der Mathematik und Physik an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg mit dem Studienziel Lehramt an den Gymnasien auf. Im Frühjahr 1974 legte ich in beiden Fächern die Vorprüfung und im April 1975 die Prüfung in Erziehungswissenschaften ab. Seit November 1975 bin ich als studentische bzw. wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut in Erlangen beschäftigt. Nach dem Studium von elf Fachsemestern bestand ich im Frühjahr 1977 die Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an den Gymnasien. Seitdem bin ich Doktorand bei Prof. Dr. K. Strambach in Erlangen.

